

# 時空一體

科學人雜誌

一對雙胞胎中的姊姊，有一天決定搭太空船到距離太陽系4.34光年的半人馬座 $\alpha$ 星，弟弟看著姊姊以86.6%的光速飛往半人馬座 $\alpha$ 星，認為姊姊花了五年到達目的地，但姊姊卻宣稱她只花了一半的時間，也就是兩年半。



## 科學人雜誌

1900~1920年間，愛因斯坦徹底顛覆了世人對空間與時間的基本概念。相對論一向被視為只有數學最厲害的人才能理解，事實上，只要具備高中程度的代數與幾何學知識，就能闡明與欣賞相對論的基本概念。相對論本質上是自然的幾何理論，因此許多非直覺又最能刺激大眾想像力的結果，都可以用圖畫說明清楚。其實，相對論不僅是空間幾何，更是空間與時間的幾何學——空間與時間交織成一體的時空組織。

撰文／徐遐生、蔡駿 翻譯／郭兆林

# 牛頓錯了！

愛因斯坦16歲時便開始思考一個問題：如果某人以光速 $c$ 追向一道光束，則光波看來會如何？根據馬克士威的理論，真空中單色的「線偏振光」是純電磁波，由振盪的電場與磁場組成，電磁場在空間中任一點所指的方向可以用箭頭表示，箭頭的長度則與電場或磁場強度成正比（參見下圖）。

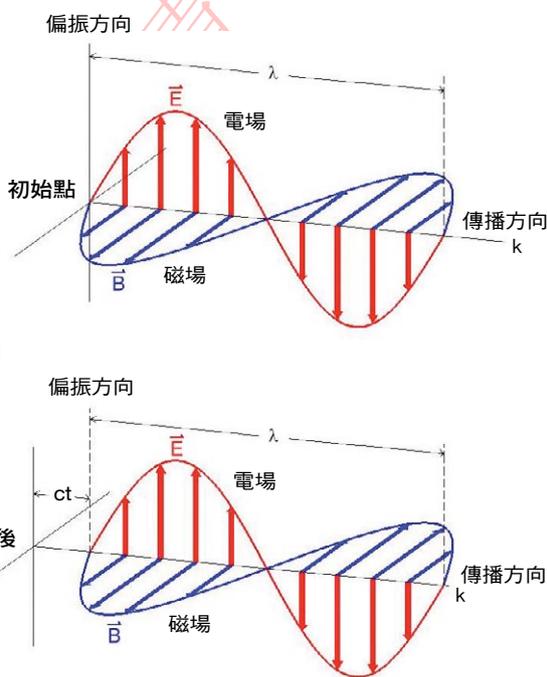
若觀察者站在空間中某一點靜止不動，他會感受到當地電場與磁場以週期 $\lambda/c$ 上下或左右振盪。根據牛頓當年建立的法則，如果有人能以光速跟著光子跑，此舉將會抵消光波的時間變化。在這個移動的參考座標下進行觀察，電場與磁場會組成一個在空間中呈現波浪變化，在時間上卻保持不變的圖樣。然而，愛因斯坦了解到馬克士威的電磁方程式並未包含這種只在空間振盪卻不隨時間振盪的數學解答。真空中電場與磁場維持不變的唯一解答，很明顯必須處處為同一常數。因此，不是馬克士威錯了，就是牛頓錯了。就愛因斯坦來看，馬克士威的電磁理論太完美了，不

可能錯誤。所以他認為，牛頓允許觀察者以任意速度（包括光速）移動，一定是錯了。對於一個學校功課不是特別行的16歲男孩，這個大膽的結論充份展露了他的直覺天份。

後來，愛因斯坦在1905年提出了一個理由，解釋為什麼現實世界的觀察者無法以速度 $c$ 與光競跑。我們不清楚愛因斯坦是不是受到邁克生-莫立實驗結果影響，才創立著名的狹義相對論，但從他的著作中顯示，他是透過上述思想實驗而獨自形成自己的想法。1905年愛因斯坦引進物理學的新假設，不論觀察者與光源的相對速度為何，任何波長的光在真空中的速度都是恆定的（約每秒30萬公里）。

如果這項假設是對的（後來許許多多實驗都證明這一點），則自然界沒有觀察者能夠追上光束，所以不可能將光視為只在空間振盪而不隨時間振盪的波。若接受這項假設，想像我們打開一支雷射筆，看光子以每秒30萬公里離開。再想像你朝光束方向以一半光速離開我們，你會觀察到光子以什麼速度飛過你？我們期待聽到的答案是每秒15萬公里，但是大出我們意料之外，你回答每秒30萬公里！

光是在空間與時間中振盪的電磁場。在任何一瞬間， $E$ 值皆呈現波浪模式，在空間中每隔波長 $\lambda$ （代表光的顏色）便重複。 $B$ 也具有相同模式，只是 $B$ 與 $E$ 的方向垂直。就時間而言，整個波模式以速度 $c$ 直線朝方向 $k$ 傳播，而 $k$ 與 $E$ 、 $B$ 皆垂直。



## 姊弟變兄妹

顯然，以高於我們所習慣的速度運動，會扭曲我們平常對空間與時間的認知。為了讓大家對這種扭曲有更清楚的認識，我們來討論以相對論式旅行前往「半人馬座 $\alpha$ 星」的情況，半人馬座 $\alpha$ 星是距離地球第二近的恆星，而最近的則是半人馬座比鄰星。

一對雙胞胎中的姊姊，有一天決定搭太空船到距離太陽系4.34光年的半人馬座 $\alpha$ 星。她的雙胞胎弟弟比較不愛冒險，決定留在地球（16頁圖），看著姊姊以0.866倍的光速飛往半人馬座 $\alpha$ 星。因為半人馬座 $\alpha$ 星距離4.34光年遠（亦即，光自半人馬座 $\alpha$ 星到地球要花4.34年），而姊姊以

0.866倍光速飛行，弟弟觀察姊姊花了五年到達目的地，不過姊姊宣稱她只花了一半時間，也就是兩年半，便可以從地球到達半人馬座 $\alpha$ 星。

這項歧異要如何解釋？姊姊的火箭上有個計時器，它利用光束在兩個平行鏡子間來回反射計時，每次光擊中鏡面，就會發出一聲「滴答」。姊姊和弟弟聽到相同數量的滴答聲（假設弟弟是透過無線電收聽）；因為滴答聲是整數，兩人聽到的滴答聲不會有差異。對姊姊來說，計時器發出一聲「滴答」所需的時間 $\Delta t$ ，是兩面鏡子間的距離除以光速。對弟弟來說，兩面鏡子間距與火箭移動方向垂直，因此間距大小不受運動影響，亦即他觀察到的垂直間距與姊姊相同。然而，當光在兩面鏡子之間來回撞擊時，鏡子會以速度 $v$ 做水平移動。因此，弟弟會觀察到光以對角線路徑 $s$ 前進，才能在移動的鏡面持續撞擊。對角線路徑 $s$ 比姊姊和弟弟看到的間距 $d$ 更長。根據狹義相對論的假設，光對兩人而言皆以相同速度移動，所以弟弟聽到每次滴答聲的時間間隔會比姊姊的需要更長時間。時間膨脹的實際大小可用畢氏定理運算，得知 $\Delta t(\text{弟}) = 2\Delta t(\text{姊})$ ，姊姊變老的速度只有弟弟的一半（見右上方〈時間膨脹的運算〉）。因此，當她抵達半人馬座 $\alpha$ 星時，弟弟已經老了五歲，而她也只老了兩歲半；原本比較老的姊姊變成了比較年輕的妹妹了！

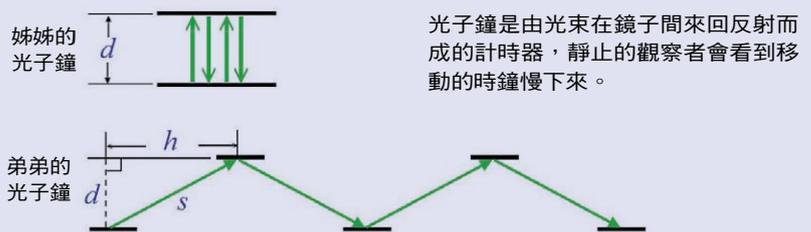
現在讀者很可能會問：這個結論是否不只適用於光子鐘？運用其他物理原理製造的計時器，會不會得到不同的結果？這個問題問得很好。事實上，物理學家相信不論運用何種方式建造的計時器，都會獲得相同的結果。物理學家也測量宇宙射線中不穩定粒子以接近光速前進的半衰期，再度獲得相同的結論。這些粒子的運動速度比在地球實驗室裡製造出的同類快，正如狹義相對論預測，它們的半衰期大幅延長，可見移動物體的時間過得的確比靜止

## 時間膨脹的運算

弟弟觀察到光沿著直角三角形的斜邊 $s$ 前進，三角形的另外兩邊是兩面鏡子的垂直間距 $d$ ，與弟弟測得一聲滴答的時間內 $\Delta t(\text{弟})$ 鏡子以速度 $v$ 在水平方向移動的距離 $h = v\Delta t(\text{弟})$ 。換句話說，斜邊 $s$ 與另兩邊 $d$ 與 $h$ 有關，且 $\Delta t(\text{弟}) = h/v$ 、 $\Delta t(\text{姊}) = d/c$ ，因此根據畢氏定理：

$s^2 = d^2 + h^2 = c^2 \Delta t^2(\text{姊}) + v^2 \Delta t^2(\text{弟})$ ；再根據相對論假設，光速對於弟弟與姊姊都是相同值 $c$ ，所以也可以得到 $s = c\Delta t(\text{弟})$ 。

如果我們將第二個式子代入第一個式子，便能求得 $\Delta t(\text{弟}) = \Delta t(\text{姊}) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ 。最後，又因為 $v = 0.866c$ ，我們得到 $\Delta t(\text{弟}) = 2\Delta t(\text{姊})$ 。



物體慢。

物理學家知道電磁學滿足狹義相對論；事實上，如我們前面所提，後者是受到前者啟發。另外，生物學家知道電磁學加上量子論（量子論可以完全滿足狹義相對論的要求），就能說明生命裡的化學作用。因此，雖然我們並不知道生物時鐘實際上如何運作，但科學家相信這項推論：當留在地球的雙胞胎弟弟老五歲時，旅行的姊姊只老了兩歲半。

你可能會反駁說：姊姊怎麼可能以0.866倍光速，在兩年半內抵達距離4.34光年遠的半人馬座 $\alpha$ 星？對於姊姊而言，她認為自己處於靜止狀態，而她的弟弟、地球以及半人馬座 $\alpha$ 星正以0.866倍光速相對她運動。這可以用相對論現象勞倫茲收縮來說明：棍子若朝自己長度方向移動時，會比靜止狀態時的長度顯得較短。因此，相對於地球與半人馬座 $\alpha$ 星呈靜止狀態的弟弟而言，地球（弟弟）與 $\alpha$ 星的距離等於4.34光年，但是就另一個觀察者（姊姊）而言，以速度0.866倍光速前進的地球與半人馬座 $\alpha$ 星間的距離等於2.17

## 時間與空間並不是牛頓在其巨作《自然哲學的數學原理》開宗明義所假設的那樣——絕對、獨立的存在。

光年，後者距離縮短了一半。對姊姊來說，這就像是一根長度為2.17光年的棍子以0.866倍光速經過她，根據計時器測量，需要2.5年才能由一端到達另一端。

至此讀者若仍感困惑，實屬正常。若弟弟認為自己處於靜止狀態而看到姊姊老得比較慢，公平起見，難道認為自己處於靜止狀態的姊姊不應該認為弟弟（以及所有跟著弟弟移動的東西）老得比她慢？根據狹義相對論，她的確可以這麼認為！任何相對固定恆星（用以有效定義何謂慣性參考系）以一定速度移動的觀察者，都有權認為自己處於靜止狀態，因為在這種慣性參考系裡，物理法則具有同效力。

他們兩人怎麼可能都對？這就是孿生子佯謬的關鍵所在。孿生子佯謬的解答如下：只要姊姊相對於弟弟移動，他們就不處於相同的基準點來比較皺紋多寡，因此他們不能客觀地決定誰真正比較老。如要比較年紀多寡，姊姊必須在抵達半人馬座 $\alpha$ 星時減速停下來、調頭再加速返回地球，當到達地球停止時，她和弟弟才能比較誰的皺紋多，然後才會發現姊姊果真老得比弟弟慢。不過，她是雙胞胎中移動的那一位，她會經歷時間較慢逝去的現象（時間膨脹）。

為何佯謬解決了？為什麼姊姊沒有權利認為是弟弟減速、加速，然後回到她身邊而更加年輕？理由是這並非合理的假設。如果是弟弟做減速、加速，則全宇宙（包括太陽系、半人馬座 $\alpha$ 星……）也必須都做減速、加速，它們顯然不可能這麼做。弟弟留在慣性參考系裡，但是姊姊並沒有，所以說，姊姊的位置與弟弟的位置並不是真正對稱的，而姊姊的時鐘（包括生物時鐘）與宇宙間其他時鐘也就脫軌了。

以上對於孿生子佯謬的解釋，與許多物理教科書不同。傳統上人們直接認定弟弟處於慣性參考系，而姊姊不是。但是事實上，若不以宇宙其他部份做為參考（一種弱形式的馬赫原理，馬赫原理係指物體的

慣性源自於整個宇宙的質量分佈），就不可能客觀定義何謂慣性參考系。在文章最後面，我們還會回到這個問題，但是現在只要知道孿生子佯謬會強迫我們考慮相對於「固定恆星」具有相對加速、減速的參考座標系。這種可能性是廣義相對論的新概念。

上述討論的重點（愛因斯坦假設真空中光速恆定的直接結果），是時間與空間並不是牛頓在其巨作《自然哲學的數學原理》開宗明義所假設的那樣——絕對、獨立的存在；相反的，空間與時間其實是互相交織的，其測量間隔隨觀察者移動狀態而定。在所謂時空的描述下，唯有空間與時間的結合具有不變的形式。如果我們考慮到相對於固定恆星不以固定速度移動的座標系，則即使這種數學形式也得修正。

### 電梯實驗

愛因斯坦在1905-15年發展廣義相對論時，並不只是要讓相對論更加完整，同時也是因為他很早體認到需要新的重力理論。換句話說，不但是牛頓的力學有缺陷，牛頓在《自然哲學的數學原理》一書所述的重力理論也有問題。根據牛頓的想法，兩個物體間的重力作用會隨兩者間距離改變而立即跟著改變。但是狹義相對論的精神在於禁止物理變化的傳播比光速快。因此，雖然在絕大多數情況下，牛頓的重力理論（作用力隨距離而改變）都能準確適用，但它根本上必定是錯的。

為了建立新重力理論的基礎，愛因斯坦提議回到伽利略在比薩斜塔做的基本實驗。現代科學家懷疑這個實驗是否真的發生過，但伽利略確實思考過這類實驗是無庸置疑的，最後讓他獲得重要真理：不同重量的物體自比薩斜塔掉落會同時墜地（此處我們忽略空氣阻力）。對牛頓來說，這個結果與其運動與重力法則吻合（見21頁〈牛頓的力學與重力法則〉）。愛因斯坦提議廢棄牛頓力學與重力法則，

#### 關於作者

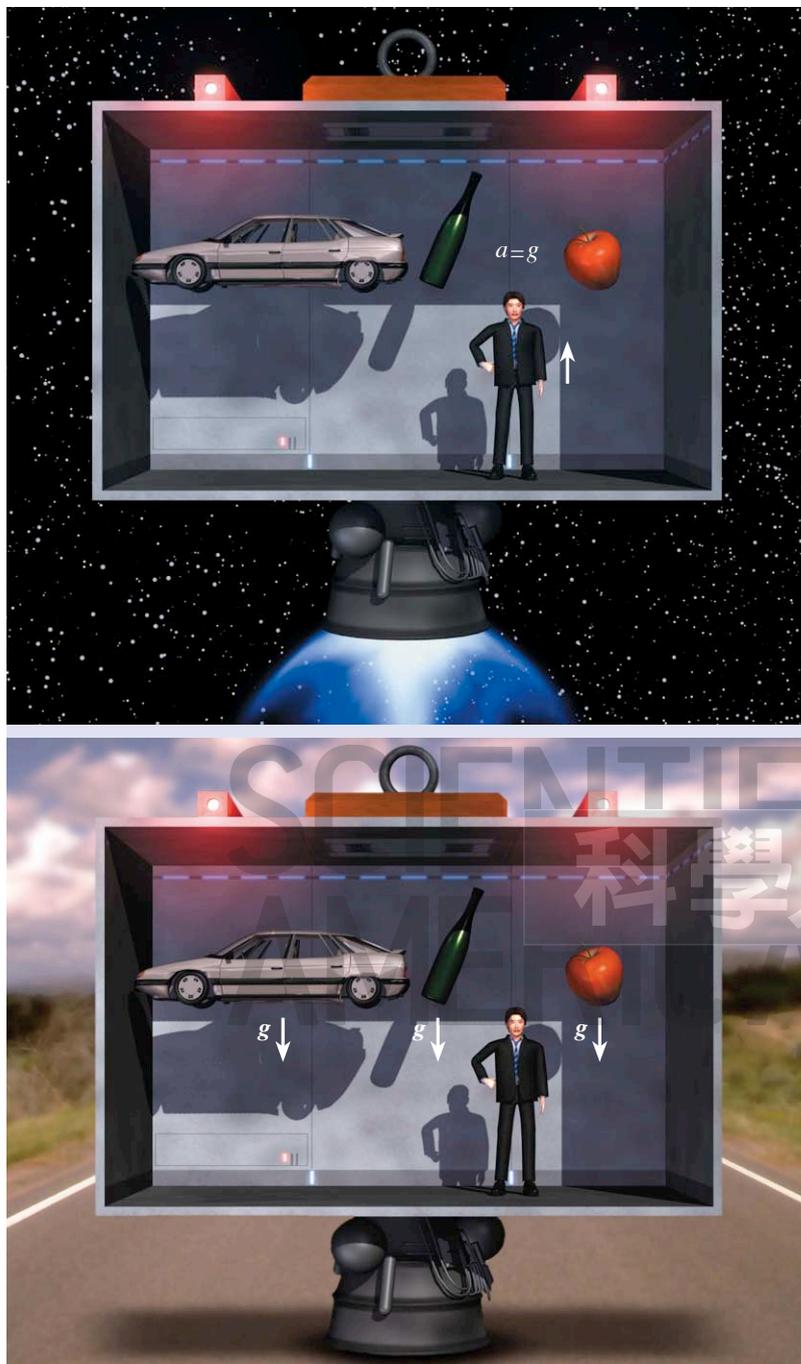
徐遐生是中央研究院院士，曾任台灣清華大學校長，他自美國哈佛大學獲得博士學位，研究興趣包括恆星與行星形成、星系動力學，以及雙星交互作用，近來也對相對論性天文物理學產生興趣。蔡駿為中央研究院天文暨天文物理研究所助研究員、清華大學物理系助理教授，他自美國加州大學柏克萊分校獲得博士學位，研究興趣是廣義相對論的各種問題，包括黑洞物理學、重力輻射、裸露的奇異點與封閉的類時曲線。

## 牛頓的力學與重力法則

牛頓的力學第二定律是 $F=ma$ ， $m$ 是質量， $F$ 是施加的作用力， $a$ 是因作用力而產生的加速度；牛頓的重力法則指 $F=GMm/r^2$ ，是物體 $M$ 作用於物體 $m$ （反之亦然）而產生的重力， $r$ 是兩者中心點之間的距離， $G$ 是萬有引力常數。在這個式子中，重力作用只適用於質點，不過牛頓證明，像地球一般的球體 $M$ 對於其表面上較小物體 $m$ （包括大小與質量皆較小）之萬有引力，總質量 $M$ 相當於集中於地球中心一點。將牛頓定律運用在伽利略的思想實驗上，將兩個 $F$ 相等、消除兩邊的 $m$ ，便可推導出加速度 $a$ ， $a=GM/r^2=g$ 。

注意若我們將地球約略視為球體，則重力場 $g$ 只與地球質量 $M$ 有關；除了落體 $m$ 到地球中心的距離 $r$ 之外（就斜塔這個問題， $r$ 幾乎是相等於地球半徑的常數），與落體其他特質無關。以地球質量與半徑而言， $g=9.8\text{m/s}^2$ 。從牛頓式觀點，得到 $a=g$ 而與落體 $m$ 其他性質無關，原因是牛頓力學與重力法則的式子當中，兩個 $F$ 式中所代入的 $m$ 相等。今日，這巧合稱為慣性質量與重力質量間的等效性。

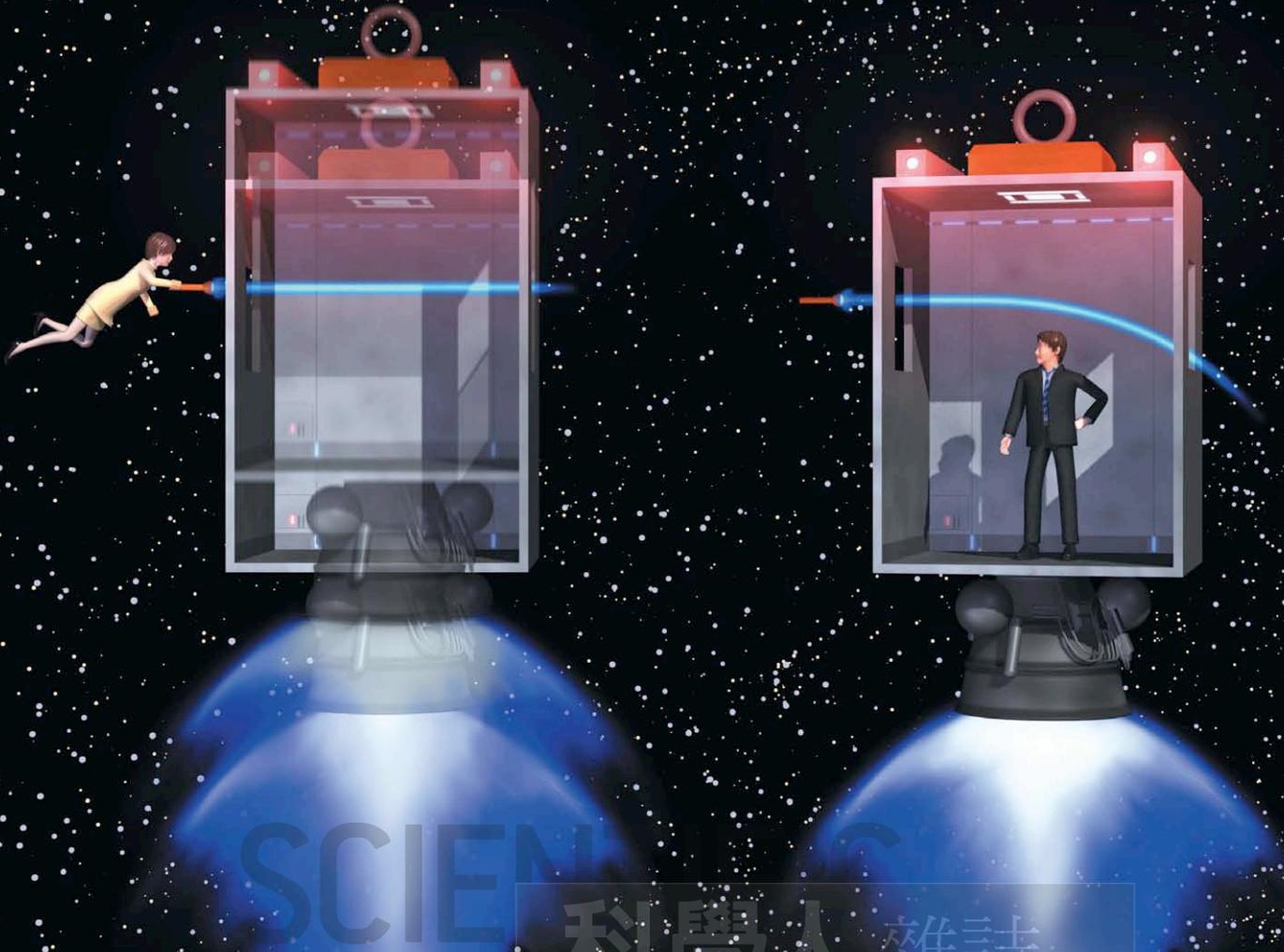
對愛因斯坦而言， $F=ma$ 與 $F=GMm/r^2$ 最終都是不正確的法則，然而兩個錯誤的結論所得到 $a=g$ 的結論，卻被伽利略與牛頓之後的實驗家如厄弗等證實。因此，愛因斯坦採用等效原理（沒有局部的實驗方法可以區分重力作用與加速作用）當做廣義相對論的新基礎假設。所以，如果觀察者僅容許做局部測量，不能看電梯外面而發現自己與電梯在外太空中正在做加速運動（左方上圖），他會認為自己住在有重力作用卻靜止的地球表面（左方下圖），而非在加速中卻不受重力作用的電梯裡。



而重新採用伽利略的發現，當做廣義相對論的新基礎假設——等效原理：沒有局部的實驗方法可區分重力作用與加速作用。

愛因斯坦著名的電梯思想實驗清楚闡釋了等效原理的物理作用（見上方圖解）。試想有兩個觀察者，其中一人站在地球表面，看著垂直重力場 $g$ 拉著一輛車子、一瓶啤酒與一顆蘋果往下墜下；另一個人站在電梯裡加速往上，其加速度 $a$ 相等於

$g$ ，朝向自由飄浮在太空中的一輛車子、一瓶啤酒與一顆蘋果。根據等效原理，這兩位觀察者沒有辦法區別他們的處境：如果站在車子底下會被壓死；如果站在啤酒瓶底下會被砸到；如果站在蘋果底下，倒是可以吃上幾口。兩者結果都是一樣的：被壓死、敲痛頭或是吃蘋果，所以電梯裡的人很容易被騙。他會認為自己住在有重力作用卻（幾乎）靜止的地球表面，而非



姊姊認為光以完美直線前進，而弟弟看到的彎曲路徑只是因為他在加速電梯中所造成；但因為弟弟每次所做的局部實驗，使他相信自己是在地球表面上，並認為地球重力使光束路徑彎曲。

在加速中卻不受重力作用的電梯裡。如果觀察者僅被容許做局部測量，即他不能看電梯外面，而無法發現自己與電梯在外太空中正在加速運動，則這說法便為正確。

現在來看看這對雙胞胎所做的思想實驗：姊姊站在外太空中電梯的外面，弟弟在加速電梯的裡面（見上圖）。電梯兩側有平行窗戶，但是不准弟弟看電梯外面。在電梯外面，姊姊發射一道光脈衝，讓光穿過兩扇窗戶並通過電梯，她看到光子從自己這邊窗戶的上緣進入電梯。因為這段期間電梯會移動，因此當光子離開電梯時，姊姊看到光子自另一邊窗戶的下緣穿出。弟弟也看到相同現象，但是他歸諸於不同原因。弟弟認為他住在地球表面，光原本平行進入窗戶中，但是被地球的重力場  $g$  彎曲造成一個彎曲的路徑，所以當光子離開第二扇窗戶時，會比較接近窗戶下緣而非上緣。

姊姊試圖說服弟弟他是錯的，她認為實

際上光以完美直線前進，而弟弟看到的彎曲路徑只是因為他在加速電梯中所造成。但是弟弟不改初衷，因為他每次所做的局部實驗，都再三使他相信自己是在地球表面上。他認為地球重力會使光束路徑發生彎曲。誰對誰錯？他們兩人都對了，姊姊與弟弟都各有道理。但是如果兩個人都對了，重力會使光彎曲。這讓愛因斯坦了解到，應該有其他方法描述重力。

### 時空彎曲

如果光本身能夠形成彎曲路徑，則客觀上，我們所謂的直線是什麼？我們不是以光的前進路徑來定義直線嗎？因此，愛因斯坦想知道，應不應該反過來認為光永遠都沿直線前進，而時空卻被重力彎曲？換句話說，局部而言，不受重力影響的姊姊其時空是平坦的（即滿足狹義相對論）；就弟弟而言，時空會受到重力作用而彎曲。（基於技術原因，弟弟需經歷比

單一常數  $g$  更複雜的加速場，才能完全模擬非局部、不能由簡單變換而消除的時空彎曲，在此我們略過不談。) 簡言之，牛頓與愛因斯坦在力學與重力理論上的差異在於：前者認為當物體受到外力作用時，會產生加速度，而且物體間會產生重力吸引；後者認為沒有所謂重力，只有時空彎曲。質量與能量會遵循彎曲時空裡的最短距路徑（亦即在彎曲的時空最接近「直線」的路徑）行進，而質量能量與張力（如壓力）會造成時空彎曲。

愛因斯坦指出，因為重力是時空本身一項特質，在時空的一小部份裡，初始速度相同的小質點會自動走相似路線，而與這些物體各自的特質（如質量  $m$  等）無關。對牛頓而言的小奇蹟（慣性質量與重力質量之間的等效性），成為愛因斯坦解釋重力的基石，亦即重力相等於時空彎曲。

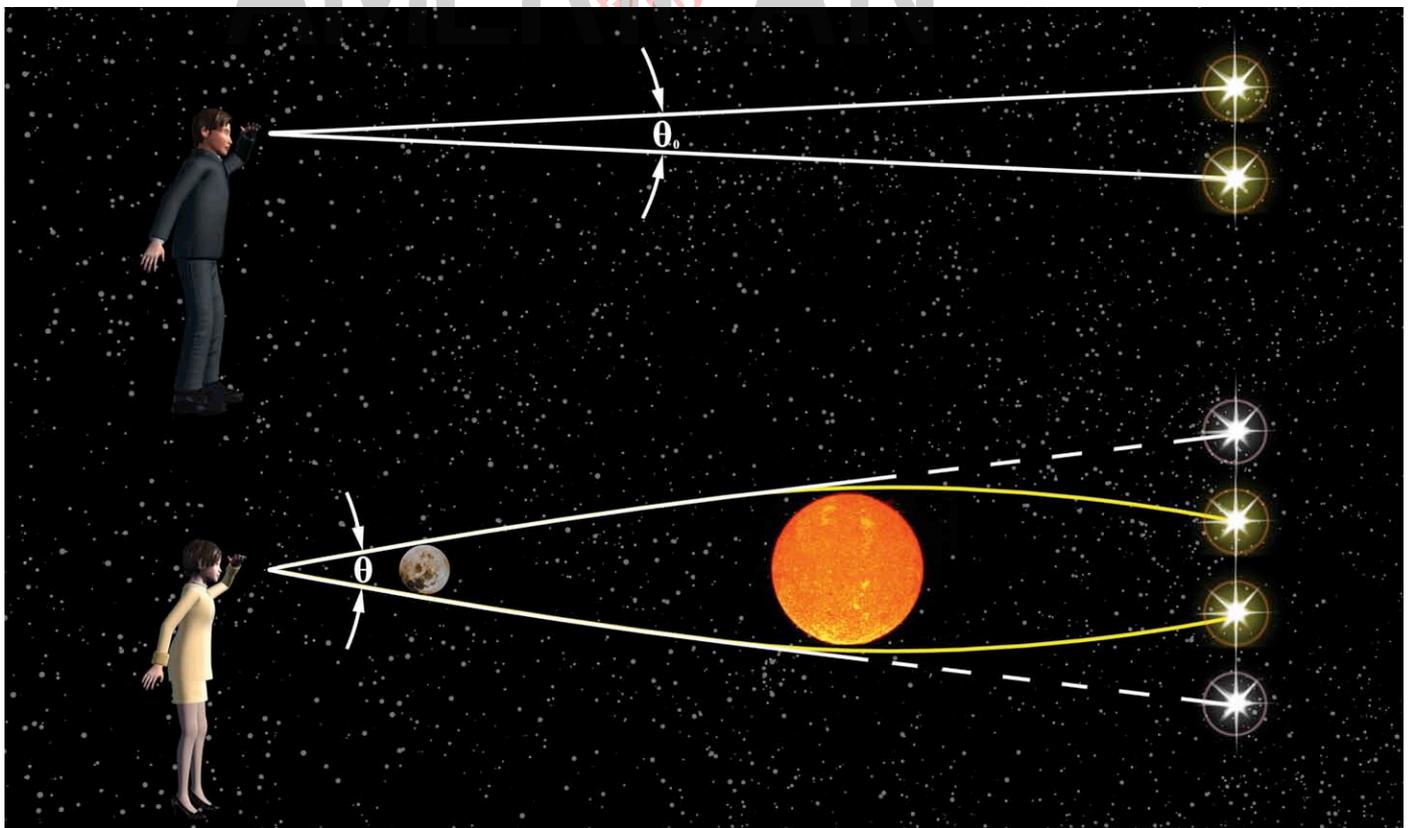
但是何謂時空彎曲？愛因斯坦最初預測太陽的重力場會造成星光路線的彎曲，這個現象可以清楚解釋時空彎曲作用。地球

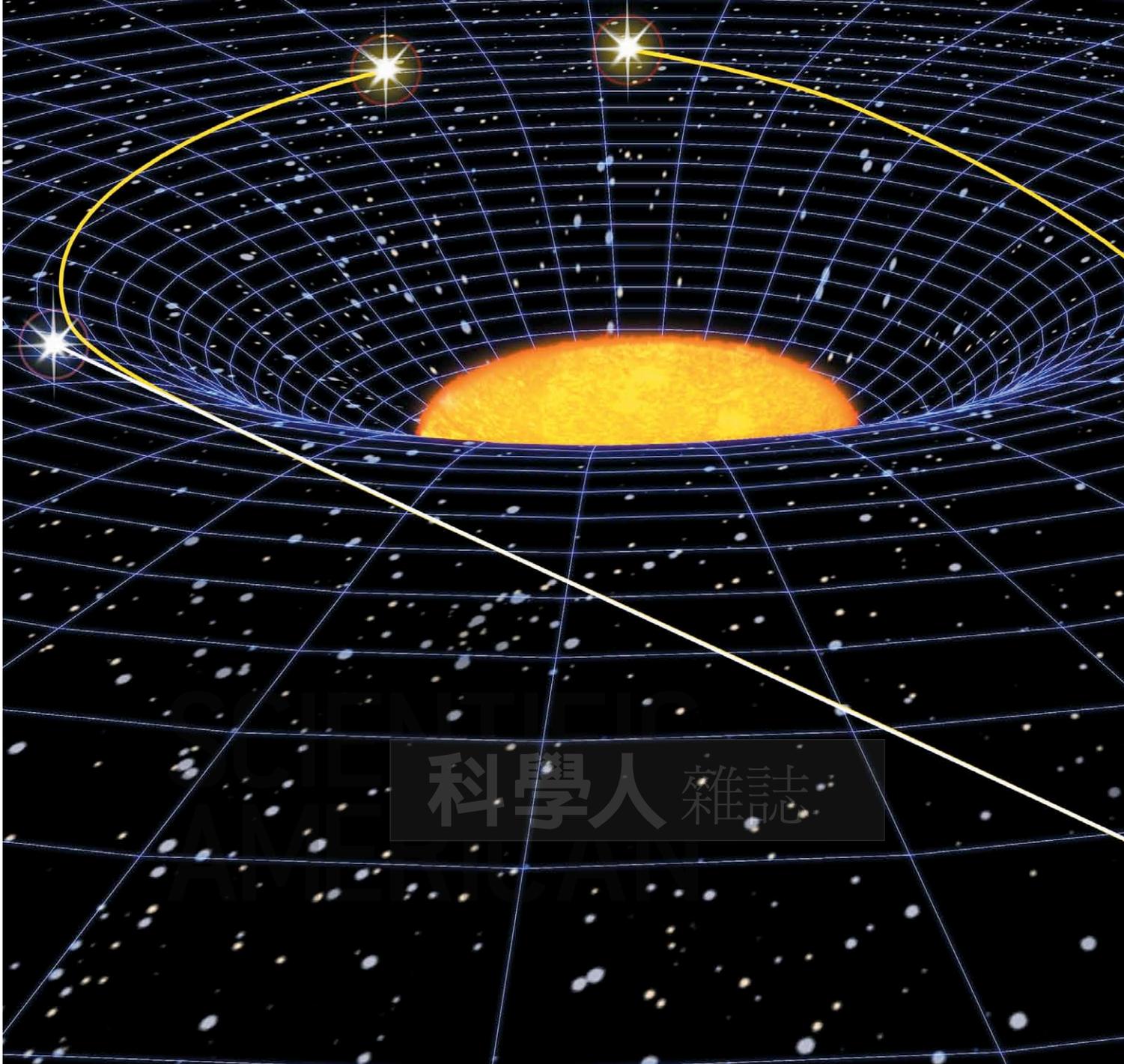
重力場造成光彎曲的作用過小，所以在愛因斯坦那時候，無法測試出他與牛頓的不同。因此，愛因斯坦提議利用更大的太陽重力場。

假設地球上的一名觀察者在黑夜中看到兩個星球夾角為  $\theta_0$ ，當地球每年繞著太陽轉時，或許有時兩星球的視線方向會與太陽方向相重疊。根據牛頓式的觀點，光在經過太陽邊緣時，重力場會彎曲星光，使兩星球視角  $\theta$  看起來大於  $\theta_0$ （見下圖）。重力場使原本比較分開的兩道光束變得較為集中，使新的視線向外移。當然，日正當中時，背景星光難以觀測。因此在愛因斯坦的年代，這個實驗必須在日全食時才能進行。因為唯有此時，耀眼的日光才會被月球遮掩。

在廣義相對論中，所謂的「重力」並不存在，那我們應該怎麼看待這個問題呢？在相對論中，遠離太陽的時空平坦，而太陽附近的時空則會出現彎曲。時空是怎麼個彎曲法呢？與平坦時空比起來，在太陽

以牛頓式想法看待星光的彎曲，光線在經過太陽邊緣時，重力場會彎曲星光，使兩星球視角  $\theta$  看起來大於  $\theta_0$ 。





## 科學人雜誌

以時空彎曲解釋星光彎曲現象：星光彎曲的成因，在於來自星球的光選擇星球與觀測者間最短的路徑。當出發點與目的地之間有一塊陷落區時，最短路徑會是一條曲線。

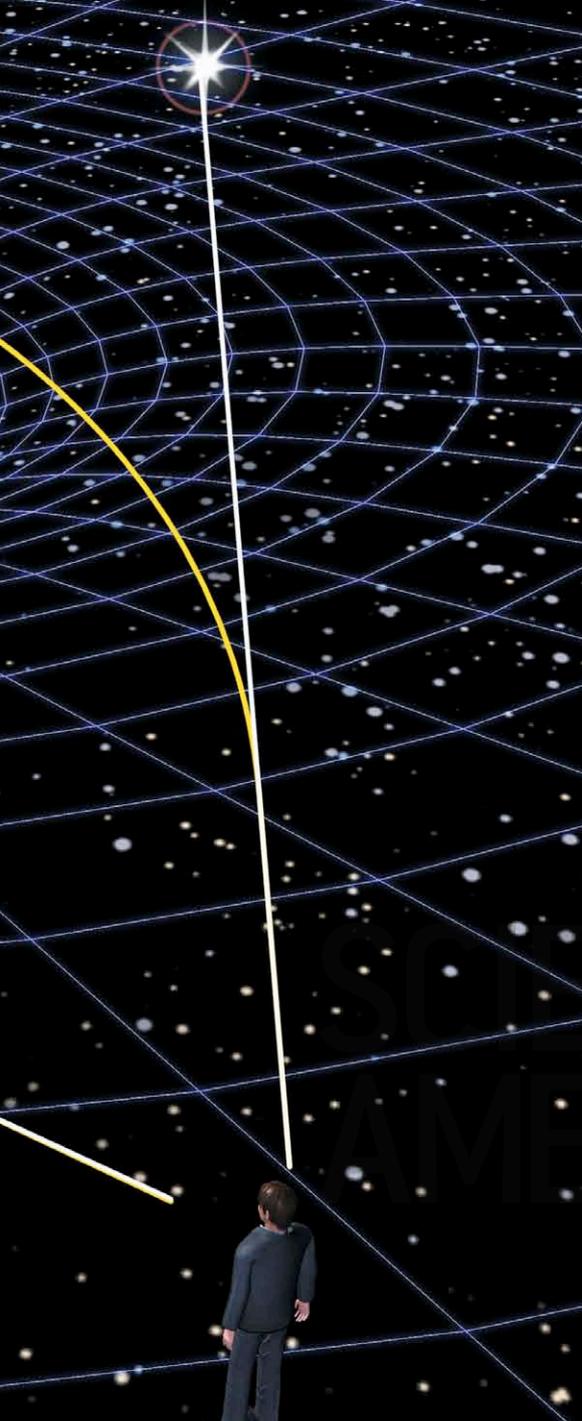
附近空間體積較大，而時間流逝則較慢。要將三維空間中的這種時空漣漪視覺化是不可能的，因為我們並非生存於更高維度空間的生物，無法想像由上下、左右、前後所構成的三維空間如何「陷進」另外一維空間（不是時間！）中。然而，由於太陽中心以及兩個點狀星球所構成的平面之外的空間與這個問題無關（地球上的觀察者必須旅行到地表與這個平面的交線上進行觀測），我們可以利用上圖的曲面來描述這個三維空間中的平面。圖中的漣漪凹向宇宙中不存在的一個方向，這個方向

的唯一用途便是讓生活在三維空間中的我們了解彎曲空間如何增加體積，或是從彎曲空間中截取的一片平面如何能夠在重力場作用下增加面積。

上圖中星光彎曲的成因，在於來自星球的光束選擇連接星球與觀測者最短的路徑。當出發點與目的地之間有一塊陷落區時，最短路徑會是一條曲線；也因為這個道理，健行者在通過山谷時往往循彎曲的路徑行走。

當愛因斯坦首次計算星光夾角在太陽重力的影響前 ( $\theta_0$ ) 與影響後 ( $\theta$ ) 的差

繪圖：張家丞



觀測者看來，光子在太陽附近所花的時間比平坦時空來得久。加入這個因子，光受空間彎曲的影響會比較大。

將愛因斯坦星光偏折的預測付諸試驗的計畫，因第一次世界大戰而延遲了。在戰後的1919年，和平條約的簽署促使一組由愛丁頓率領的英國天文學家遠赴巴西及西非外海的普林西比觀測日全食。他們測量太陽附近的亮星位置，將所得的數據與六個月前太陽不在附近時做比較。結果與愛因斯坦的理論一致，永遠推翻了牛頓對時間空間和重力作用的認知。雖然如此，牛頓理論和相對論的預測在一般狀況下相差無幾。在重力場不強而且物體速度不快的狀況下，廣義相對論的方程式可簡化為牛頓力學方程式。兩個理論只有在兩個極限之下才會出現顯著的差異：一是當時空彎曲的程度與重物的大小相當時；二是在質點速度開始接近光速時。黑洞的理論代表了其中一個極限。

### 黑洞的事件視界

已知質量為 $M$ 的物體，要有多大半徑 $R$ 才會使表面的光恰可逃逸？18世紀的拉普拉斯可能是歷史上第一位提出這個問題的人。拉普拉斯把光自 $M$ 表面脫離的速度設為光速（見26頁〈三種軌道〉），回答了自己所提出來的問題。這個半徑 $R$ 為 $R = 2GM/c^2$ 。

現在我們知道，上式的答案雖然正確，拉普拉斯的推導卻完全不成立。首先，牛頓的動能 $mv^2/2$ 對於靜止質量為零的光子並不適用；再者，牛頓理論中的位能公式 $-GMm/r$ 對於光無法逃逸的強大重力場也不成立。這兩項錯誤恰巧抵消，使拉普拉斯得到正確的表示式，而這個公式的正確推導其實來自於完全不同的考量。

根據廣義相對論的正確推導，由施瓦氏於1916年所提出。因此，我們今天稱這表示式 $R_{\text{Sch}} = 2GM/c^2$ 為「非旋轉黑洞的施瓦氏半徑」（旋轉黑洞也可能存在，不過

別時，他很失望地發現以幾何方法計算的 $\theta - \theta_0$ 和根據牛頓理論將重力作用視為力的結果完全雷同（以牛頓理論進行計算時，仍然要依照 $E = mc^2$ 將能量為 $E$ 的光子的重力質量與慣性質量視為相等）。當時，愛因斯坦尚未將廣義相對論完全定案。到了1915年，他確立了廣義相對論的最終形式，並重新計算星光偏折的問題。愛因斯坦發現根據新的計算，廣義相對論的偏折（ $\theta - \theta_0$ ）比牛頓理論的預測大了一倍。這項歧異的成因在於，太陽附近不但空間彎曲，時間也會扭曲。在外界

當出發點與目的地之間有一塊陷落區時，最短路竟會是一條曲線；也因為這個道理，健行者在通過山谷時往往循彎曲的路徑行走。

## 三種軌道

當一具質量  $m$  的物體在重質點（或球狀重物） $M$  的影響下運動時，根據牛頓力學及重力理論可以導出能量守恆定律。該定律稱，即便物體  $m$  的速度  $v$ 、與重物距離  $r$  等量值會隨時間改變，其動能  $mv^2/2$  與位能  $-GMm/r$  的總和卻與時間無關： $E = mv^2/2 - GMm/r = \text{常數}$ 。

能量的守恆，代表質量  $m$  的軌道有三種不同形式：當  $E < 0$  時，軌道為封閉；當  $E = 0$  時，軌道為臨界；最後當  $E > 0$  時，軌道為開放。當  $E < 0$  時， $m$  與  $M$  的距離  $r$  不可能無限大，否則上式中恆正的動能項會等於小於零的能量項，無法至無限遠的軌道被稱為封閉式；反之，當  $E > 0$  時  $r$  可以趨近無限大，因此軌道被稱為開放式； $E = 0$  則代表封閉式與開放式軌道的分界點。若  $R$  為球狀重物  $M$  的半徑，質點  $m$  自其表面出發（ $r = R$ ）而恰能脫離重力束縛至無窮遠處所需要的速度  $v = v_0$ ，可以將上式中的  $r$  設做  $R$ ， $E$  設做  $0$ ，並求取  $v$  而得  $v_0 = (2GM/R)^{1/2}$ ，式中的  $v_0$  為自  $M$  表面的脫離速度。

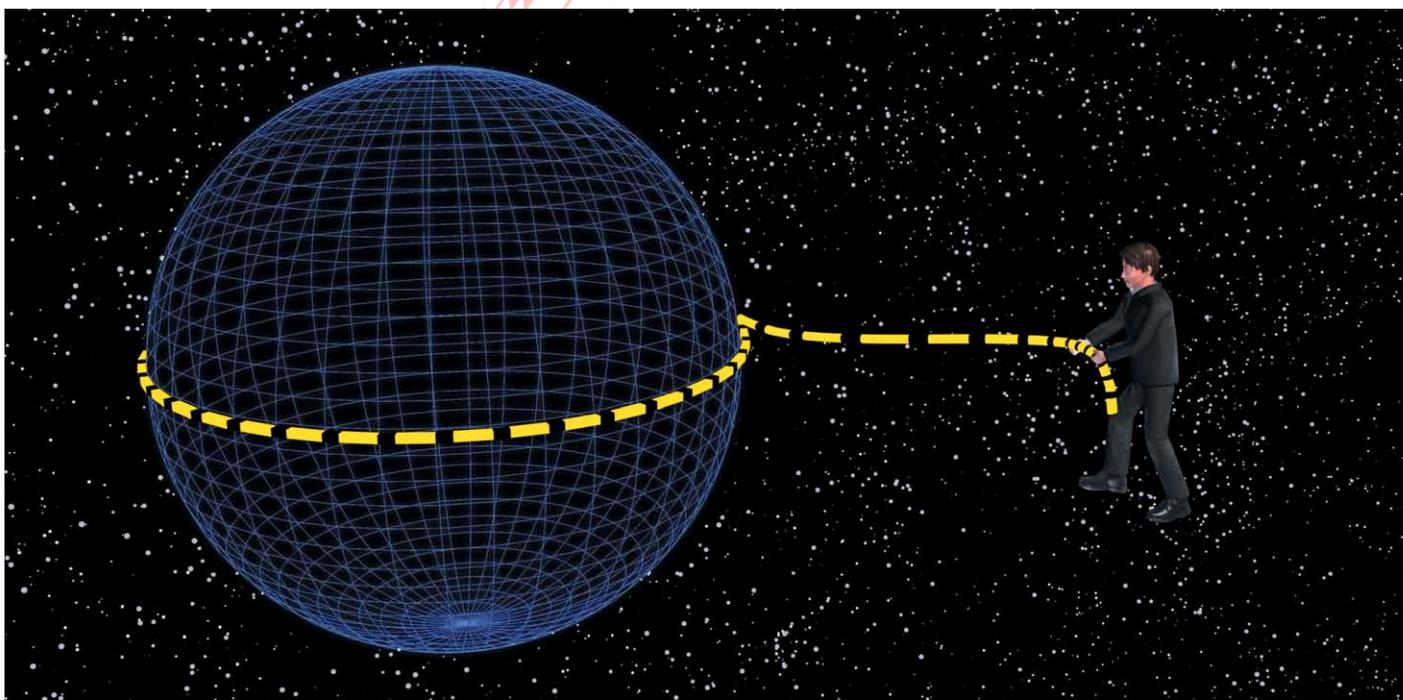
在本文中我們不談論其時空幾何。「施瓦氏」這個命名雖較「拉普拉斯」妥當，「半徑」這個詞彙卻是誤用，因為黑洞根本就沒有所謂的半徑。如何測量黑洞半徑呢？我們不能用尺量，因為黑洞會在我們讀取刻度前便吞了這把尺；在測量一般物體長度時我們可以發射光束橫過它，以鏡面反射回來，再測量光束來回一共花了多少時間。由於光以光速前進，這個時間可以換算成為長度。將這個方法用在黑洞

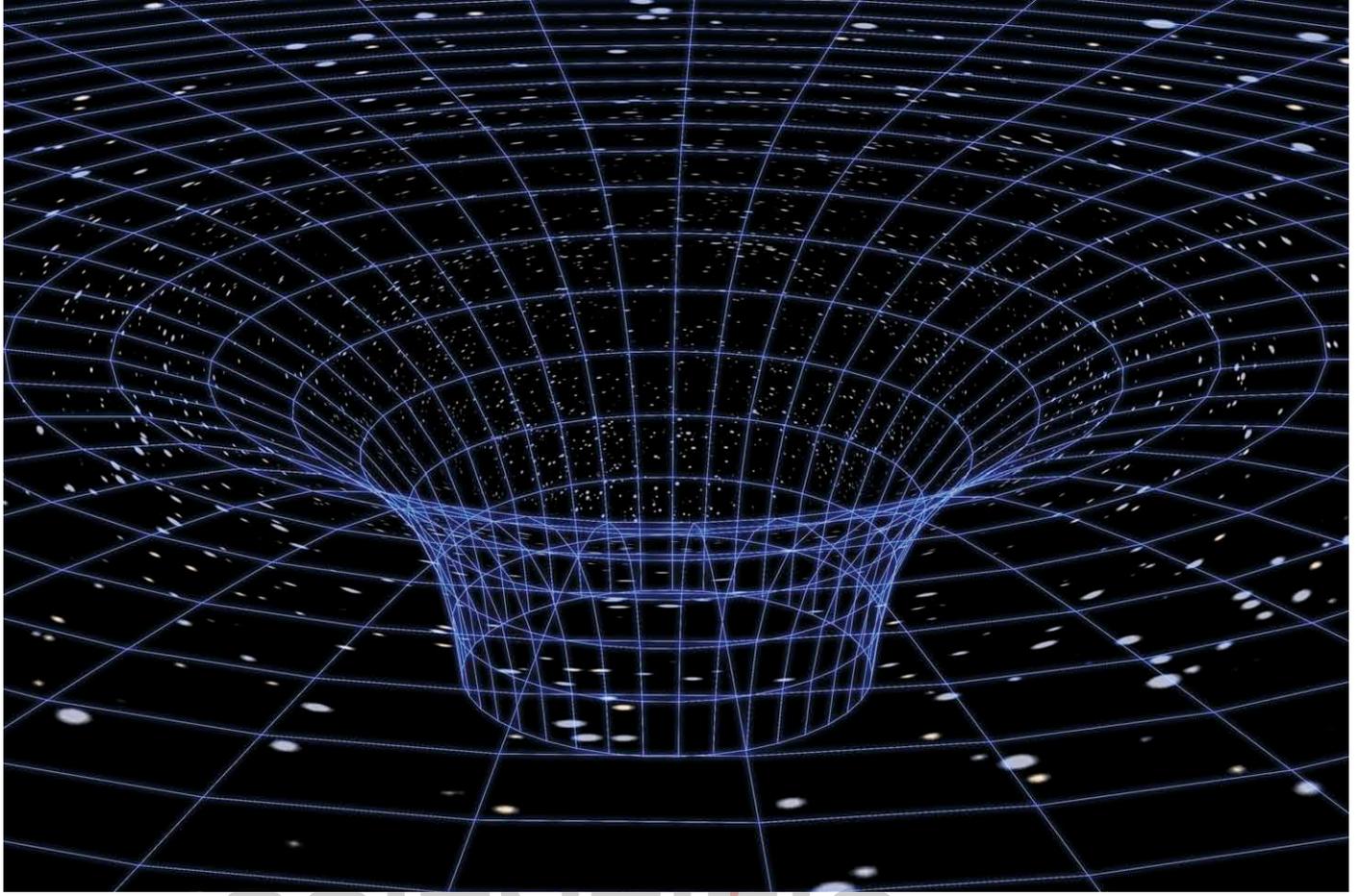
直徑的測量呢？我們打開光束，光子卻掉入黑洞而一去不返。所有類似的測量法都註定要失敗。我們能夠測量的，是事件視界的周長（見下圖）：以一把捲尺環繞黑洞，測量最接近黑洞而還能夠全身而退之處的周長，會得到  $2\pi R_{\text{Sch}}$ ，其中  $R_{\text{Sch}}$  可由以上公式計算。

想像你站在黑洞的事件視界上，以手電筒對實質上位於無窮遠的我們發出光束。為簡單起見，假設光束相對黑洞中心以徑向發出。根據拉普拉斯的想法（牛頓力學），光線到達不了我們的原因在於當光試圖克服重力影響時會漸漸慢下來，最後停止，轉向掉回黑洞（這描述對於總能量較零稍小的光子成立，能量等於零的光子能夠以末速度零到達無窮遠處）。

施瓦氏對同樣現象的詮釋（廣義相對論描述）則大不相同。根據局部仍然成立的狹義相對論，光子永遠以光速前進，相對局部觀測者永遠不會慢下來。而且若光以徑向背對黑洞發出，其軌跡會維持一直線。根據施瓦氏的描述，位於無窮遠的我們之所以測不到來自事件視界的訊號，其原因和拉普拉斯的說法大大不同。無論其

我們只能安全測到黑洞周長，而沒有辦法測到半徑。





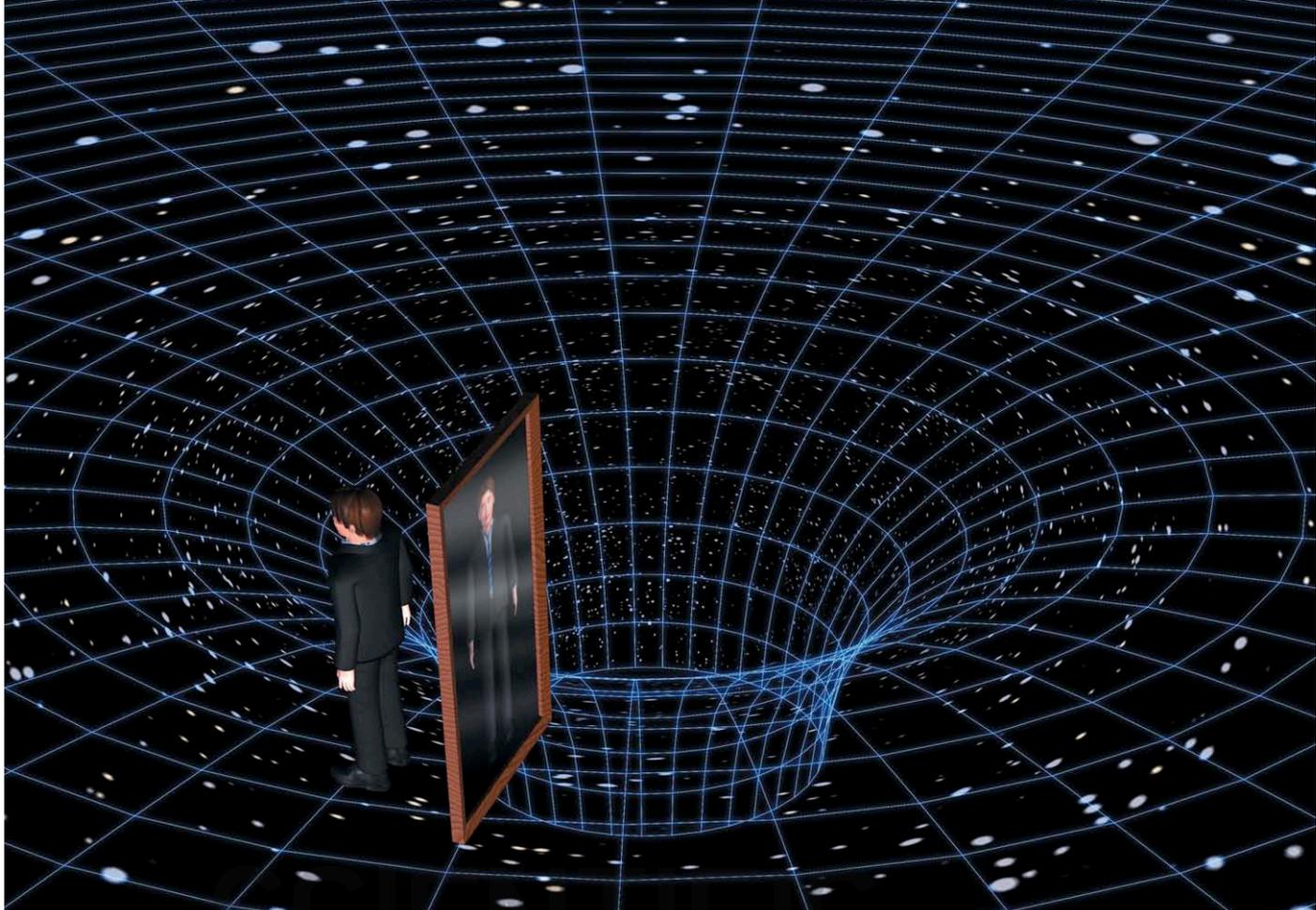
初始波長為何，當訊號光子抵達我們所在的位置時雖然仍以光速前進，其波長卻會受到重力紅移而變得無限大。波長無限大的波根本就不會振盪，也不帶能量，因此無法偵測。

現代天文物理學理論認為，瀕死的星體若具有大於三倍太陽質量的殘餘核心便會生成黑洞。當M等於三倍太陽質量時，施瓦氏公式告訴我們： $R_{Sch}=9$ 公里。為了再度向大家強調這個值並不代表真正的半徑，我們進行下列思想實驗：想像我們將你以堅固的繩索環腰綁起，漸漸朝向一個三倍太陽質量黑洞的事件視界前進。你的背上綁著一個火箭，繩索也會適時伸長，使你能夠繞著黑洞飛。飛行的正圓軌道所定義的平面包括黑洞的質量來源，以及綁著繩索一端的支點。首先你以 $2\pi$ 乘以90公里的圓周繞著黑洞。或許你會斷言此時你與黑洞中心的距離為90公里，但請別太早下結論。我們讓你往內32公里，令你再度繞著黑洞飛，並測量圓周。你所測到的圓周除以 $2\pi$ 將會是60公里。等等，是不是弄錯了？90減去32不是等於

58嗎？怎麼會是60呢？我們將疑惑中的你繼續往內33.75公里，要你再進行圓周測量，你得到的圓周除以 $2\pi$ 為30公里。在提出問題之前，我們要你再靠往黑洞19.8公里。你警覺地拒絕了：根據你的計算 $32+33.75+19.8=85.55$ 。因為90減去85.55將會小於 $R_{Sch}$ （9公里），你擔心這麼一來會一去不返。在我們的再三保證下你聽從指示，戰戰兢兢地再往黑洞下探19.8公里。你鬆了一口氣，發現仍然可以繞著黑洞飛，所測得的圓周除以 $2\pi$ 等於15公里。換句話說，你還在黑洞的事件視界之外。

顯然地，你所環繞著的三倍太陽質量物體扭曲了人們對於一般（歐幾里得）幾何的常識，上圖（請與24頁圖對照看）可以解釋究竟是怎麼回事，圖中的漏斗狀曲面總結了上述思想實驗的結果。和24頁圖一樣，與繪出的表面垂直的方向在宇宙中並不存在。雖然真正的飛行軌道皆位於同一平面，但由於半徑與圓周的關係已不再能夠以一般歐幾里得幾何描述，我們無法將這些軌道繪於一張平坦的紙上，而必

繞著黑洞的圓其半徑比周長除以 $2\pi$ 還大，要使黑洞附近的圓周縮小一定值，我們得減少比根據歐幾里得平面幾何學計算結果更多的徑向長度才行。



在黑洞中圓周為  $1.5R_{\text{Sch}}$  乘以  $2\pi$  處，由於光會沿著正圓軌道行進，男人背後鏡子裡反映的，就是他自己的正面影像。

須用曲面表達。從27頁圖中我們可以看出，要使黑洞附近的圓周縮小一定值，我們得減少比根據大家所熟悉的歐幾里得平面幾何學計算結果更多的徑向長度才行。24頁圖也有類似的效應，只是比較小。

然而，27頁圖與24頁圖的差別不只是程度上而已。在24頁圖當中，時空組織延伸至質量中心；而27頁圖中的時空組織則在事件視界處出現一個洞。空間不僅因重力作用出現凹陷，整個時空組織已被位於中心的奇異點硬生生戳出一個洞。

為了繼續探索黑洞事件視界附近的特異時空幾何，我們將你繼續放低，更加靠近黑洞中心。你一邊下降，一邊看天上的星光。你會發現天上的星星的位置出現偏折，而原本熟悉的星球顏色變得藍得多——怕了吧！當你抵達圓周為13.5公里（ $1.5$ 倍 $R_{\text{Sch}}$ ）乘以 $2\pi$ 的位置時，我們要你向前看：不，別朝黑洞方向看，往那裡什麼也看不見，朝圓周方向看，你看見了什麼？已經視線模糊的你奮力睜開雙眼，想把眼前的景象看得清楚一些。不一會兒

你終於認出你正盯著自己的後腦勺！在現在的位置（圓周為 $1.5R_{\text{Sch}}$ 乘以 $2\pi$ ），光會沿正圓軌道行進（見上圖）。從後腦勺發出的光子會繞一圈，然後進到你的眼睛裡。所以，不用鏡子你便可以看見自己背面，這真是神奇。

### 空間與時間的角色顛倒

我們繼續把你放低。糟了！啪地一聲，繩子斷了！你開始不斷地往黑洞中心掉下去。這不能怪我們，我們已經購買最貴的繩子，但是當你接近黑洞的事件視界，根本就沒有繩子能夠阻止你掉進中心奇異點。對你來說，只消短短幾毫秒的時間，你便會穿過事件視界，對我們來說，雖然實質上你試圖傳送給我們的訊號在幾毫秒內便凝住了，你却似乎永遠到不了事件視界；空間與時間似乎是角色顛倒了。

上一句話是什麼意思？當你還在事件視界之外時，在外面的我們只要施點力，便可以穩住你在靜止空間的位置；但是我們卻無力阻止時間前進（雖然時間前進的速

度對我們和你各不同)。相對地，當你在事件視界附近時，我們卻無力阻止你掉向空間內部，但是對我們在外面的人來說，你的時間似乎停止了，你似乎永遠不會變老了。

至此，我們的發現之旅駛向人跡未至的領域。沒有人知道，掉入黑洞裡的勇者到底會遇到什麼，因為從來沒有人回來告訴我們發生什麼事。具有恆星質量的黑洞（目前看來最有可能是這種情況），是否將因質量能量收聚到如此集中，以致巨大的重力使他粉身碎骨，即使如超人也難逃一劫？黑洞是否像科幻小說所稱會通往別的宇宙？它們另一端是否連接白洞，兩者是否能形成蟲孔，可做為空間捷徑或是時光機器去拜訪過去或未來？（參見《科學人》2002年11月號〈如何建造時光機？〉）

即使不借助於廣義相對論或是蟲孔，時間旅行到遙遠未來是相對容易的。如學生子伴謬所指出，只要以極接近光速的速度旅行，就有可能比靜止的另一人老得慢。造訪許多奇異的事件現場的旅程，理論上可能相當地舒適。想像建造一艘加速度 $g$ 的火箭（就現代科技可謂易如反掌），旅行起來和住在地球上一樣。

假設有人想要造訪哈伯太空望遠鏡能夠看到最遠的星系之一（離地球百億光年遠的星系），他可以搭乘我們建造的火箭，前半段旅程以 $g$ 加速前進，旅程到一半時將火箭調頭，以 $g$ 減速前進，當抵達目的地時速度減為零，相對於目標星系呈靜止狀態，這個人便可以進行探索了。因為整個行程絕大部份是以接近光速旅行，使時間膨脹達到極致，所以50年便可以完成全部旅程。

請讀者想像一下，50年間旅行100億光年的距離！以同樣方法，再花50年便可回到地球。（如何讓人類生命延長到100年以上，與如何使火箭載足燃料維持100年的加速度 $g$ 比起來，前者想必是容易得

多）然而，回家之後，太空人發現地球上已經過了200億年。不僅所有的朋友早就死光，太陽也已經死了。這種航向遙遠未來的旅途，或許在心理上較接近於一去不回的訣別吧！

相反地，回到過去是狹義相對論嚴格禁止的。然而，它卻未被廣義相對論的方程式所禁止。說不定，有些特別怪異的質能或張力形式所造成時空結構是容許時光倒流的。果真如此，可能會發生許多邏輯上的矛盾。舉例而言，時間旅客可能回到過去，阻止雙親見面。如此一來，時間旅客是怎麼來的？

由於考慮到因果律，愛因斯坦猜想現實的質能張力形式不會產生這種奇怪的時空結構。雖然本文作者能夠理解愛因斯坦的想法，我們卻必須承認他的猜測至今仍未獲得證明。最大的難題在於如何定義「現實」的質能張力形式？10年前仍然被視為異端的質能張力形式，現在已經納入主流的宇宙學說。或許在將來的物理學中，容許回到過去的時空結構會變得稀鬆平常也說不定。

我們希望讀者帶走的，是一個比較合邏輯、在物理上也比較確定的結論。在愛因斯坦之後，將時空看為獨立、其流逝或存在與宇宙其他事物完全不相干的想法，已經過於天真。空間和時間不再是獨立變數，它是動力學變數並具有結構。即便是在真空中，局部時空也與觀測者的運動有關，而時空的大尺度動力學則由宇宙中的質能張力含量來決定。完美慣性座標（完全滿足狹義相對論的座標系）的存在與否與整個宇宙的結構（宇宙學）有關。這麼看來，愛因斯坦所發明的廣義相對論使我們更加接近馬赫所提出來的機械哲學假設。雖然，人們至今仍然無法提出馬赫原理的直接證明。 SA

郭兆林是台灣大學物理學系碩士，美國加州大學柏克萊分校天文物理研究所博士，現為史丹佛大學物理系助理教授，專長為宇宙學。

或許在將來的物理學中，容許回到過去的時空結構會變得稀鬆平常也說不定。